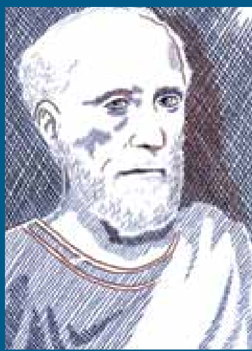
André Ross
Professeur
de mathématiques



Pythagore a laissé son nom à un théorème dont on se sert régulièrement en mathématiques comme en physique. Mais d'où vient ce théorème ? On peut toujours construire des carrés sur les côtés d'un triangle quelconque. Comment Pythagore a-t-il eu l'idée que si le triangle est rectangle, il y a une relation aussi étroite entre les aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit et celui construit sur l'hypoténuse ?

Accromath Vol. 5 • été – automne 2010

PYTHAGORE

Pythagore est né vers ~569 à Samos, une île de la mer Égée située tout près de Milet où vivait Thalès, qui devait avoir une cinquantaine d'années à la naissance de Pythagore. Il fut peut-être l'élève de Thalès et de son disciple Anaximandre avant d'entreprendre des voyages. Il a séjourné plusieurs années en Égypte, puis à Babylone où il a assimilé les connaissances en mathématiques et en astronomie de ces civilisations.

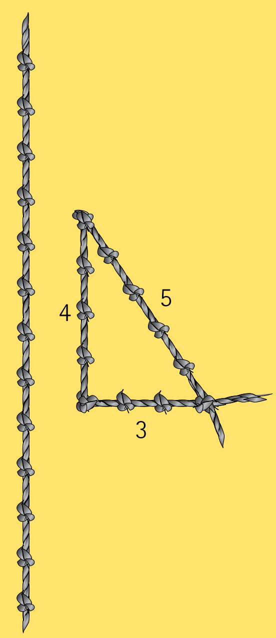
À son retour à Samos, l'île était sous la domination du tyran Polycrate et Pythagore décida de s'installer à Crotone en Italie du sud et d'y fonder une communauté qui tenait à la fois de la secte et de l'académie. On y étudiait la philosophie, les mathématiques et les sciences naturelles. Les membres de l'École vivaient en communauté et gardaient secrets les enseignements reçus et leurs découvertes. Il est donc difficile de distinguer les contributions de Pythagore et celles de ses disciples. Pythagore est mort vers ~475.

Triplets pythagoriciens

Durant ses voyages, Pythagore avait appris l'existence de triplets de nombres, appelés maintenant *triplets pythagoriciens*, qui ont la caractéristique que la somme des carrés des deux plus petits est égale au carré du plus grand. Le plus connu des triplets pythagoriciens est formé des nombres 3, 4 et 5.

On raconte que les géomètres égyptiens savaient que l'on peut former un angle droit à l'aide d'une corde à treize nœuds en formant un triangle dont les longueurs des côtés sont 3, 4 et 5. Ces cordes faisaient partie des instruments utilisés pour délimiter des parcelles de terrain après les crues du Nil.

Les Babyloniens connaissaient certains triplets pythagoriciens comme en témoigne la tablette d'argile appelée Plimpton 322.



Corde à treize nœuds

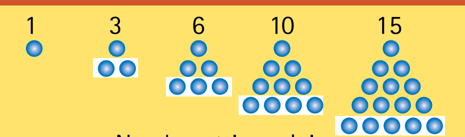
Géométrie des nombres

Pour Pythagore, *Tout est nombre*. Cette conviction lui est peut-être venue de l'astronomie. Les constellations se distinguent par leur nombre d'étoiles et par la disposition géométrique de celles-ci. En construisant diverses dispositions géométriques des nombres, les Pythagoriciens ont été les premiers à découvrir des propriétés abstraites des nombres.

En représentant les nombres par des points ou des cailloux, ils les ont classifiés en nombres pairs et nombres impairs, et également par les formes géométriques selon lesquelles les points peuvent être disposés.

Nombre triangulaire de rang *n*

Un *nombre triangulaire* est un nombre dont les points peuvent se disposer de façon à former un triangle équilatéral. Les premiers nombres triangulaires sont représentés dans l'illustration suivante :



Nombres triangulaires

Il est facile de constater que le nombre triangulaire de rang n est la somme des entiers de 1 à n, soit

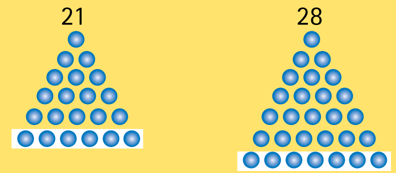
$$T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n.$$

De plus, pour obtenir le nombre triangulaire suivant, il suffit d'additionner au nombre triangulaire de rang n le nombre de points de la ligne ajoutée dans le triangle, soit $n + 1$. Les anciens Grecs ont donné le nom de *gnomon* à ce qui est ainsi ajouté.

Le mot gnomon était utilisé dans divers contextes par les mathématiciens grecs. En astronomie, le gnomon désignait l'assemblage formé d'une tige fixée perpendiculairement à un plan et servant de cadran solaire. En géométrie, le gnomon désignait une équerre. On doit à Héron d'Alexandrie (vers ~150 à ~75) la définition suivante du gnomon :

Un gnomon est la chose
qui ajoutée à quelque chose d'autre,
figure ou nombre, forme un tout semblable
à la chose à laquelle elle a été ajoutée.

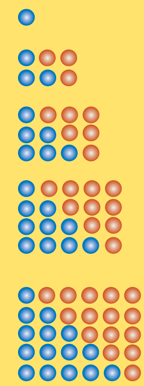
Ainsi, en ajoutant une ligne formée de six points au nombre triangulaire de rang 5, on obtient le nombre triangulaire de rang 6 et ainsi de suite.



Nombres triangulaires de rang 6 et de rang 7

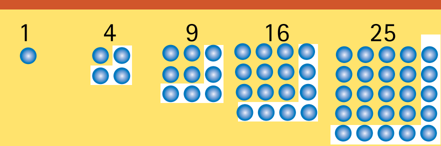
De plus, les Pythagoriciens avaient remarqué qu'en disposant les nombres triangulaires pour former un triangle rectangle, il est possible de déterminer le terme de rang n sans avoir besoin d'écrire tous ses prédécesseurs. En reproduisant ce nombre comme dans la figure ci-contre, on forme un rectangle dont on peut facilement déterminer le nombre de points en faisant le produit du nombre de lignes et du nombre de colonnes. En divisant ce nombre de points par 2, on obtient le nombre triangulaire de rang n. En termes modernes, on dit que le nombre triangulaire de rang n est :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$


Nombres triangulaires

Nombre carré de rang *n*

Diverses formes polygonales ont été utilisées par les Pythagoriciens pour obtenir les nombres carrés, pentagonaux, hexagonaux, ... Un nombre carré est un nombre dont les points peuvent être disposés de façon à former un carré. L'illustration suivante regroupe les premiers nombres carrés.



Nombres carrés

Dans cette illustration, on remarque que le gnomon forme une équerre dont le nombre de points est impair. En termes modernes, on écrit symboliquement :

$$C_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

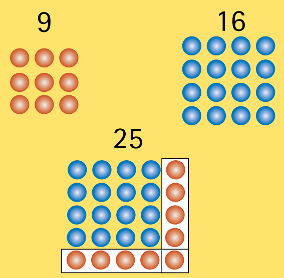
Pour décrire cette relation verbalement on dit que le nombre carré de rang n est la somme de n premiers nombres impairs.

Il est à noter que 1 avait un statut particulier, il est ce à partir de quoi tout est engendré.

Triplets pythagoriciens et nombres carrés

Les Pythagoriciens, habitués à la représentation géométrique des nombres, pouvaient facilement détecter une relation intéressante entre les carrés des nombres 3, 4 et 5. Ainsi, le carré de 3 est le gnomon du carré de 4 pour obtenir le carré de 5. Ce qui, en écriture moderne, donne :

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

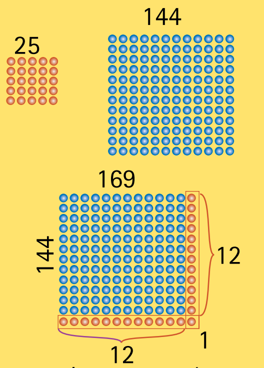


9 est le gnomon de 16 pour obtenir 25

Les Pythagoriciens ont tout naturellement cherché à connaître tous les nombres carrés décomposables en une somme de deux carrés.

Puisque le gnomon d'un nombre carré est toujours un nombre impair, cela signifie que tous les carrés impairs sont impliqués à tour de rôle dans un triplet. Ainsi, le nombre carré impair plus grand que 9 est 25. En considérant que $2n + 1 = 25$, on peut donc le disposer pour former le gnomon d'un autre nombre carré. On obtient la configuration ci-contre, soit :

$$12^2 + 5^2 = 13^2$$



25 est le gnomon de 144 pour obtenir 169

En écriture moderne, les Pythagoriciens avaient constaté qu'en additionnant à n^2 le gnomon $2n + 1$, on a $(n + 1)^2$, soit :

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Il suffit donc de déterminer les nombres impairs qui sont des carrés pour découvrir d'autres triplets. C'est-à-dire les nombres m tels que :

$$m^2 = (2n + 1).$$

Connaissant un nombre impair qui est un carré, il est alors facile de déterminer les trois nombres du triplet. Par exemple, 49 est un nombre impair carré et en posant

$$m^2 = (2n + 1) = 49,$$

on a $m = 7$, $n = 24$ et $n + 1 = 25$. Ces trois nombres satisfont à la relation :

$$24^2 + 7^2 = 25^2$$

Dans une approche moderne, on détermine une formulation générale en posant $m^2 = 2n + 1$ et en exprimant la relation

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

par rapport à m. En isolant n dans $m^2 = 2n + 1$, on obtient

$$n = \frac{m^2 - 1}{2} \quad \text{et} \quad n + 1 = \frac{m^2 + 1}{2}$$

d'où :

$$\left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2 \quad *$$

où m est un nombre impair. Il suffit de donner à m une valeur impaire pour déterminer un

La tablette Plimpton 322

Selon l'interprétation que fait l'historien des mathématiques Otto Eduard Neugebauer (1899 - 1990) de la tablette Plimpton 322, gravée entre ~1900 et ~1600, les Babyloniens auraient connu certains de ces triplets. Il semble bien que Pythagore ait pris connaissance de l'existence de ces triplets durant ses séjours en Égypte et à Babylone.

Côté c	Diagonale d	$\sqrt{d^2 - c^2}$
119	169	120
4 601	6 649	4 800
12 709	18 541	13 500
65	97	72
319	481	360
2 291	3 541	2 700
799	1 249	960
4 961	8 161	6 480
45	75	60
1 679	2 929	2 400
1 771	3 229	2 700

Transcription d'un extrait de la tablette Plimpton 322 en système décimal selon l'interprétation de Neugebauer

La tablette Plimpton 322, Rare Book and Manuscript Library, Columbia University triplet pythagoricien. Ainsi, en posant $m = 9$, on obtient

$$40^2 = 9^2 = 41^2.$$

La relation *, appelée *formule de Pythagore*, est valide pour tout entier impair $m \geq 3$.

Formule de Pythagore

Si m est un nombre entier impair tel que $m \geq 3$, alors

$$\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$$

est un triplet pythagoricien.

Des triplets au théorème

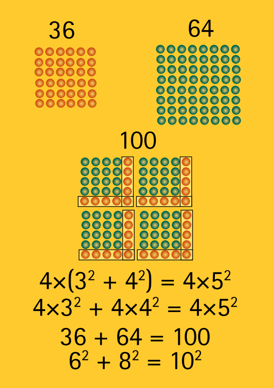
La recherche des triplets a-t-elle joué un rôle dans la découverte du théorème?

Pour les Pythagoriciens, les produits de nombres représentaient des aires de rectangles et les nombres carrés représentaient des aires de carrés. Il était naturel pour eux de considérer que le carré des nombres d'un triplet était le reflet d'une relation entre les aires de carrés. De plus, le triplet 3, 4 et 5 forme un triangle rectangle, ce qui signifie que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse de ce triangle est égal à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. A-t-on la même propriété pour tous les triangles rectangles ? Les triplets pythagoriciens forment-ils tous des triangles rectangles ? La culture du secret des Pythagoriciens ne nous permet pas de savoir avec certitude comment ils démontraient ce théorème ni comment ils sont parvenus à l'énoncer. Ont-ils découvert cette propriété en constatant qu'un nombre carré impair est toujours le gnomon d'un nombre carré ? La démonstration qu'ils en faisaient est-elle l'une de celles présentées dans l'article de Bernard Hodgson qui suit ?

Cela demeure un mystère.

Formule de Platon

Peut-on déterminer tous les triplets pythagoriciens avec la formule de Pythagore? Le philosophe Platon, qui a été initié à la philosophie pythagoricienne par Archytas de Tarente, a répondu par la négative à cette question en tenant le raisonnement suivant qui est illustré par la figure ci-contre. Si on reproduit quatre fois la configuration des carrés des nombres d'un triplet, on obtient encore un triplet pythagoricien dont tous les chiffres sont pairs.



Dans une approche moderne, le raisonnement de Platon revient à multiplier les deux membres de l'équation par 4. Cela donne :

$$(m^2-1)^2 + 4m^2 = (m^2+1)^2$$

En simplifiant cette expression, on obtient la *formule de Platon* soit :

$$(m^2 - 1)^2 + (2m)^2 = (m^2 + 1)^2.$$

Cette formule est valide pour tout $m \geq 2$. C'est-à-dire qu'en remplaçant n par un nombre entier plus grand ou égal à 2, on obtient un triplet pythagoricien[1].

Formule de Platon

Si $m \geq 2$ est un nombre entier, alors

$$(m^2 - 1)^2 + (2m)^2 = (m^2 + 1)^2$$

est un triplet pythagoricien.

1. *Au lemme 1 de la proposition 29 du livre X, Euclide pose le problème : trouver deux nombres carrés de manière que leur somme soit un carré. Il y développe une méthode qui, en écriture moderne, s'énonce :*
   Soit deux nombres entiers $m > n$, *alors*
   $$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2.$$